Algebra 1

Wydział Matematyki i Informatyki UAM

dr Piotr Rzonsowski

Wszelkie uwagi, propozycje zmian jak i pytania proszę przesyłać na adres rzonsol@amu.edu.pl, wersja z dnia 9 maja 2015

Rozdział 1

Teoria Grup

Zadanie 1. *Sprawdź przemienność, łączność, poszukaj elementu neutralnego i odwrotnego, które istnieją dla działania*

a) $a * b = a + b + 100$ *w zbiorze liczb całkowitych;*

b) $a * b = 5^{\log_5 a \cdot \log_5 b}$

c) $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f(x) = ax + b \ ; \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ *gdzie działanie jest określone następująco*

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

d)

$$\forall_{a,b\in\mathbb{Z}} \qquad a * b = \begin{cases} a + b & \text{dla } a = 2k \\ a - b & \text{dla } a = 2k + 1 \end{cases}$$

e) $a * b = 2 - a + ab - b$ *w zbiorze* $A = (1, \infty)$

Zadanie 2. *Wykazać, że w dowolnym zbiorze* A*, działanie* $a*b := a$ *jest działaniem łącznym.*

Zadanie 3. *Sprawdzić, czy podane operacje definiują działania wewnętrzne w zadanym zbiorze. Jeśli tak, to zbadać ich podstawowe własności tj. łączność, przemienność oraz istnienie elementu neutralnego. Następnie wyznaczyć elementy odwracalne względem tego działania.*

a) *Dodawanie w zbiorze* $\{-1, 0, 1\}$.

b) *Mnożenie w zbiorze* $\{-1, 0, 1\}$.

c) *Dodawanie w zbiorze* $\mathbb{N} \cup \{0, 1\}$.

d) *Mnożenie w zbiorze* $(0, 1]$.

e) *Odejmowanie w zbiorze* $\mathbb{R}$.

f) *Mnożenie w zbiorze* $\mathbb{Z}$.

g) *Funkcja* min *w zbiorze* $\mathbb{Z}$.

h) *Funkcja* max *w zbiorze* $\mathbb{N}$.

i) *Operacje logiczne OR, AND, XOR w zbiorze wszystkich skończonych ciągów binarnych.*

Zadanie 4. *Napisać tabelki działań dla grup*

a) $\mathbb{Z}/4$*;*

b) $\mathbb{Z}_5^{\times}$*;*

Zadanie 5. *Sprawdzić czy dane pary tworzą grupy*

a) $(\{5^k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$*;*

b) $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$*;*

c) $(\mu_n, \cdot)$*, gdzie* $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z^n = 1\}$*;*

Zadanie 6. *Udowodnić, że zbiór* $GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ *z mnożeniem jest grupą nieabelową.*

Zadanie 7. *Udowodnij, że zbiór* $SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ *jest podgrupą grupy* $GL_n(\mathbb{R})$.

Zadanie 8. *Utworzyć tabelkę działania w grupach* $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_5$, $\Phi(10)$ *i* $\Phi(12)$. *Następnie wyznaczyć wszystkie podgrupy tych grup.*

Zadanie 9. *Niech* $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *i niech dla* $i = 1, 2, \dots, 6$ *funkcje* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *będą określone wzorami:*

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f_3(x) = \frac{x-1}{x}$$
$$f_4(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_5(x) = 1 - x, \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

Sprawdzić, czy zbiór $G = \{f_1, f_2, \dots, f_6\}$ *ze składaniem funkcji tworzy grupę (zbudować tabelkę). Jeśli tak, to wyznaczyć wszystkie podgrupy.*

Zadanie 10. *Niech macierze* $\overline{1}, \overline{(i)}, \overline{j}, \overline{k}$ *będą określone następująco:*

$$\overline{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \overline{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \overline{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Pokazać, że zbiór $\{\pm\overline{1}, \pm\overline{i}, \pm\overline{j}, \pm\overline{k}\}$ *z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę(kwaternionów).*

Zadanie 11. *Udowodnij, że para* $(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}, *)$ *jest grupą, gdzie działanie jest określone w następujący sposób*

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Zadanie 12. *Niech* $D = \mathbb{R}$ *i niech dla* $i = 1, 2, \dots, 6$ *funkcje* $f_i : D \to D$ *będą określone wzorami:* $\begin{array}{ll} f_1(x) = x, & f_2(x) = -x, \\ f_3(x) = ix & f_4(x) = -ix. \end{array}$ *Sprawdzić, że składanie funkcji jest działaniem w* $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *(zbudować tabelkę). Czy para* $< G, \circ >$ *jest grupą?*

Zadanie 13. *Wykazać, że w grupie* G *równość* $a^2 = a$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $a = e$

Zadanie 14. *Znajdź wszystkie podgrupy grupy* $(\mathbb{Z}, +_{12})$.

Zadanie 15. *Niech* G *będzie grupą* G' *- zbiór tych elementów grupy* G*, które są przemienne z każdym elementem grupy* G*. uzasadnić, że* G' *jest podgrupą grupy* G.

Zadanie 16. *Pokazać, że przekrój dwóch podgrup* G_1 *i* G_2 *grupy* G *jest podgrupą grupy* G.

Zadanie 17. *Niech* H *będzie podgrupą grupy* G *oraz* $g \in G$ *będzie ustalonym elementem. Pokazać, że zbiór* $gHg^{-1} = \{ghg^{-1},\ h \in H\}$ *jest podgrupą grupy* G.

Zadanie 18. *Nich* H_1, H_2 *będą podgrupami grupy abelowej* G. *Pokazać, że* $H_1 + H_2 := \{h_1 + h_2 \ :\ h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ *jest podgrupą grupy* G.

Zadanie 19. *Pokazać, że* $SL_n(\mathbb{R})$ *jest podgrupą* $GL_n(\mathbb{R})$.

Zadanie 20. *Wyznacz wszystkie warstwy grupy* $\mathbb{Z}/16$ *względem jej podgrupy*

a) $\{0\}$
b) $\{0, 8\}$
c) $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

Definicja 1 (Rząd elementu)**.**
Niech G będzie grupą, $a \in G$. Jeśli istnieje taka liczba naturalna k, że $a^k = e$ to najmniejszą taką liczbę nazywamy rzędem elementu a w grupie G i oznaczamy $rz(a)$. Jeśli nie istnieje taka liczba to mówimy, że element ma rząd nieskończony.
Przykład 1.
Mamy grupę $\mathbb{Z}/6$ *i element* $g = 2$*, wtedy*
$2 + 2 + 2 = 0$ *a więc* $rz(2) = 3$

Zadanie 21. *Znaleźć rzędy danych elementów w danych grupach:*

i) $g = 2 \quad G = \mathbb{Z}/16$
ii) $g = 5 \ G = \mathbb{Z}/12$
iii) $g = 3 \ G = (\mathbb{Z}/11)^\times$
iv) $g = O_{120} \ G = D_6$
v)
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \ G = S_5$$

Zadanie 22. *Udowodnić, że dla każdego* $a \in G$ *zachodzi równość* $rz(a) = rz(a^{-1})$

Zadanie 23. *Udowodnić, że dla każdego* $a, b \in G$ *zachodzi równość* $rz(ab) = rz(ba)$
Definicja 2 (Homomorfizm)**.**
Funkcję $\varphi : G_1 \to G_2 (G_1, G_2$ grupy) nazywamy **homomorfizmem** grup jeśli
$$\forall_{g_1, g_2 \in G_2} \ \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$
Definicja 3.
$$Im\varphi := \{g \in G_2 \ : \ g = \varphi(g_1), g_1 \in G_1\} \text{ obraz } \varphi$$
$$ker\varphi := \{g_1 \in G_1 \ : \ \varphi(g_1) = 1_{G_2}\} \text{ jądro } \varphi$$
Definicja 4.
Niech $\varphi : G_1 \to G_2$ będzie homomorfizmem grup, wtedy

i) φ jest **monomorfizmem** jeśli $ker\varphi = 1_{G_1}$
ii) φ jest **epimorfizmem** jeśli $Im\varphi = G_2$
iii) φ jest **izomorfizmem** jeśli φ jest bijekcją
iv) φ jest **endomorfizmem** jeśli $G_1 = G_2$
v) φ jest **automorfizmem** jeśli jest izomorfizmem i endomorfizmem

Zadanie 24. *Czy następujące przekształcenia są homomorfizmami, jeśli tak to wyznaczyć jądro i obraz:*

i) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \ln(x)$
ii) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \ \varphi(x) = e^x$
iii) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(x) = x^2$
iv) $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \ \varphi(x) = x^2$
v) $\varphi : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \ \varphi(x) = |x|$
vi) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n, \ \varphi(x) = (x)_n$
vii) $\varphi : M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ \varphi(X) = trX$
viii) $\varphi : C_{[0,1]} \to \mathbb{R} \ \varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$
Twierdzenie 1.
Niech $\varphi : G_1 \to G_2$ *będzie homomorfizmem, wtedy*

i) $Im\varphi$ *jest podgrupą w* G_2
ii) $ker\varphi$ *jest dzielnikiem normalnym w* G_1
iii) $\forall_{N \trianglelefteq G} \exists_{\varphi : G \to G'} N = ker\varphi$

Lemat 1.
Homomorfizm grup $\varphi : G_1 \to G_2$ *jest iniekcją (1:1)* $\iff ker\varphi = \{1_{G_1}\}$

Lemat 2.
Niech $\varphi : G_1 \to G_2$ *będzie homomorfizmem grup.*

i) *Jeśli* H *jest podgrupą w* G_1 *to* $\varphi(H)$ *jest podgrupą w* G_2.

Jeśli N *jest dzielnikiem normalnym w* G_1 *i* φ *jest epimorfizmem to* $\varphi(N)$ *jest dzielnikiem normalnym w* G_2

ii) *Jeśli* $K \subset G_2$ *jest podgrupą w* G_2 *to* $\varphi^{-1}(K) \subset G_1$ *jest podgrupą w* G_1.

Jeśli K *jest dzielnikiem normalnym w* G_2 *to* $\varphi^{-1}(K)$ *jest dzielnikiem normalnym w* G_1.

Zadanie 25. *Udowodnić, że funkcja* $\varphi : G \to G$ *określona wzorem* $\varphi(x) = x^2$ *jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* G *jest grupą abelową.*

Definicja 5 (Dzielnik normalny)**.**
Niech $H \subset G$ wtedy podgrupę H nazywamy podgrupą **normalną(dzielnikiem normalnym)** jeżeli:

$$\forall_{a \in G}\ aH = Ha$$

i oznaczamy wtedy $H \lhd G$

Lemat 3.
Dla podgrupy $H \subset G$ *następujące warunki są równoważne*

1) H *jest dzielnikiem normalnym grupy* G;
2) *Dla każdego* $a \in G$ *zachodzi* $a^{-1}Ha \subset H$;
3) *Dla każdego* $c, d \in G$ *zachodzi* $(cH)(dH) = (cd)H$

Zadanie 26. *Dla danych grup sprawdzić czy dane podgrupy są dzielnikami normalnymi:*

i) $G = \mathbb{Z}/35\ H = \{0, 7, 14, 21, 28\}$
ii) $G = \mathbb{Z}/24\ H = \{0, 6, 12, 18\}$
iii) $G = (\mathbb{Z}/15)^{\times}\ H = \{1, 2, 4, 8\}$
iv) $G = D_4\ H = \{Id, O_{90}, O_{180}, O_{270}\}$
v) $G = D_3\ H = \{Id, O_{120}, O_{240}\}$

Zadanie 27. *Udowodnić, że* $SL_n(K) \lhd GL_n(K)$.

Definicja 6.
Niech G będzie grupą, wtedy $C(G) = \{g \in G : gg' = g'g\ \forall_{g' \in G}\}$ nazywamy **centrum** grupy G.

Zadanie 28. *Niech* G *będzie grupą pokazać, że:*

i) $C(G) \lhd G$
ii) $C(G)$ *jest abelowa*
iii) G *jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy* $C(G) = G$

Zadanie 29. *Pokazać, że w grupie abelowej każda podgrupa jest dzielniekim normalnym swojej grupy.*

Twierdzenie 2 (I tw o izomorfizmie).
Jeżeli $\varphi : G_1 \to G_2$ *jest homomorfizmem grup to istnieje izomorfizm grup*

$$\widetilde{\varphi} : G_1/ker\varphi \to Im\varphi.$$

Zadanie 30. *Udowodnić, że grupa ilorazowa* $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ *jest izomorficzna z grupą* $\mathbb{R}^\times$.

Zadanie 31. *Korzystając z twierdzenia 2 udowodnić, że:*

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \backsimeq \mathbb{Z}/n$
ii) $D_4/\{Obroty\} \backsimeq \mathbb{Z}/2$
iii) $GL_n(K)/SL_n(K) \backsimeq K^\times$
iv) $\mathbb{C}/\mathbb{R} \backsimeq \mathbb{R}$
v) $\mathbb{R}^4/H \backsimeq \mathbb{R}^2$ *gdzie* $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : \; x_1 - 2x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$
vi) $\mathbb{R}^\infty/H \backsimeq \mathbb{R}^\infty$ *gdzie* $H = \{(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : \; \forall_{i\in\mathbb{Z}} a_{2i} = 0\}$
vii) $C_{[0,\infty]}/H \backsimeq \mathbb{R}^\infty$ *gdzie* $H = \{f \in C_{[0,\infty]} : \; \forall_{n\in\mathbb{N}} f(n) = 0\}$

Definicja 7 (Grupa cykliczna).
Grupę G nazywamy **cykliczną**, gdy istnieje taki element $g \in G$, że dla każdego $g' \in G$ istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $g' = g^k$, taki element g nazywamy **generatorem** grupy G.

Zadanie 32. *Pokazać, że:*

i) każda grupa cykliczna jest abelowa.
ii) każda podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna

Zadanie 33. *Wypisać wszystkie generatory następujących grup cyklicznych:*

i) $\mathbb{Z}/24$
ii) $\mathbb{Z}/35$
iii) $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$
iv) $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$
v) $\mathbb{Z}$

Zadanie 34. *Dla każdego* $a \in \Phi(9)$ *wyznaczyć podgrupę* $< a >$ *i określić rząd* a. *Czy* $\Phi(9)$ *jest grupą cykliczną?*

Zadanie 35. *W grupie* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *określić rząd elementu* $\frac{m}{n} + \mathbb{Z}$, *gdzie* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $NWD(n, m) = 1$.

Zadanie 36. *Udowodnić, że*

i) jeśli $n > 1$ *to grupa* $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$ *nie jest cykliczna;*
ii) jeśli $(n, m) > 1$ *to grupa* $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$ *nie jest cykliczna;*
iii) jeśli $(n, m) = 1$ *to grupa* $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$ *jest cykliczna i* (a, b) *jest generatorem jeśli* $(n, a) = (m, b) = 1$;
iv) liczba różnych generatorów grupy G *jest równa* $\Phi(|G|)$;
v) jeśli $(n, m) = 1$ *to* $\Phi(nm) = \Phi(n)\Phi(m)$.

Definicja 8.
Niech $X \subset G$ będzie podzbiorem grupy G $< X >:= \bigcap_{H\subset G, X\subset H} H$ jest najmniejszym podzbiorem w G zawierający zbiór X. Mówimy wtedy, że zbiór X **generuje grupę** $< X >$.

Przykład 2.
Niech $G = \mathbb{Z}/10$ *natomiast* $X = \{2\}$. *Wtedy jeśli 2 jest generatorem to dostajemy podgrupę* $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Rozdział 2

Teoria Pierścieni

Definicja 9. Niech będzie dany nie pusty zbiór A, zawierający 0, określmy na nim 2 działania wewnętrzne.

$$\cdot, + \ : \ A \times A \to A$$

tak zdefiniowany zbiór z dwoma działaniami nazywamy **pierścieniem** jeśli spełnione są warunki:

(P1) $(A, +, 0)$ jest grupą abelową
(P2) $\forall_{a,b,c \in A}\ (ab)c = a(bc)$
(P3) $a(b + c) = ab + ac\ (a + b)c = ac + ab$

Jeśli ponadto:

(P4) $\exists_{1 \in A}\ \forall_{a \in A}\ 1a = a1 = a$

to A nazywamy pierścieniem z **jedynką**

(P5) $\forall_{a,b \in A} ab = ba$

to A nazywamy pierścieniem **przemiennym**

Zadanie 37. *Udowodnić, że jeśli A jest pierścieniem, oraz $a \in A$ to $a0 = 0a = 0$.*

Zadanie 38. *Wykazać, że jeśli A jest pierścieniem, oraz $a, b \in A$, to $a(-b) = (-a)b = -ab$.*

Zadanie 39. *Sprawdzić, że dany zbiór jest pierścieniem :*

i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
ii) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
iii) $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$*, gdzie* $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\ :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$
iv) $(C_{[0,1]}, +, *)$*, gdzie* $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (f * g)(x) = f(x) * g(x)$

Zadanie 40. *Sprawdzić, że dany zbiór macierzy tworzy pierścień z dodawaniem i mnożeniem macierzy:*

i) $M(n, \mathbb{R})$
ii) $M(n, \mathbb{Z})$

Zadanie 41. *Niech $(A, +\cdot)$ będzie pierścieniem i niech działania $\oplus, \odot$ w zbiorze $A \times \mathbb{Z}$ będą określone wzorami*

$$(a, k) \oplus (b, l) = (a + b, k + l),\ \ (a, k) \odot (b, l) = (ab + la + kb, kl)$$

Wykazać, że trójka $(A \times \mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem z jedynką. Udowodnić, że pierścień $A \times \mathbb{Z}$ jest przemienny wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień A jest przemienny.

Zadanie 42. *Niech* $(\mathbb{R}[X], +, \circ)$, *gdzie* $+$ *jest zwykłym dodawaniem a* $\circ$ *jest składaniem odwzorowań, czy tak zdefiniowany zbiór z działaniami tworzy pierścień.*

Zadanie 43. *Sprawdzić, że jeśli* $(A, +)$ *jest grupą abelową i działanie* $\cdot$ *w zbiorze* A *jest dla wszystkich* $a, b \in A$ *określone wzorem* $a \cdot b = 0$, *to zespół* $(A, +, \cdot)$ *jest pierścieniem.*
Definicja 10.
Niech A będzie pierścieniem(przemiennym, z 1), B nie pustym podzbiorem A. Mówimy, że B jest podpierścieniem jeśli z działaniami $\cdot, +$ z A, $(B, +, \cdot, 0, 1)$ jest pierścieniem(odp. przemiennym, z 1).

Zadanie 44. *Zbadać, czy dany podzbiór* B *jest podpierścieniem pierścienia* $C_{[0,1]}$

i) $B = \{f \in C_{[0,1]} \ : \ f(1) = 0\}$
ii) $B = \{f \in C_{[0,1]} \ : \ f(0) = f(1)\}$
iii) $B = \{f \in C_{[0,1]} \ : \ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$

Zadanie 45. *Zbadać, czy dany zbiór* B *jest podpierścieniem pierścienia* $M(2, \mathbb{R})$

i) $B = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$
ii) $B = M(2, \mathbb{Q})$
iii) $B = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \ : \ detA = 0\}$
iv) $B = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \ : \ detA = 1\}$
Definicja 11.
Niech A będzie pierścieniem z 1, wtedy

i) element $a \in A$ nazywamy elementem **odwracalnym** jeśli $\exists_{b \in A} \ ab = ba = 1$;
ii) element $a \in A$ nazywamy **dzielnikiem zera** jeśli $\exists_{b \in A \setminus \{0\}} \ ab = 0$;
iii) element $a \in A$ nazywamy elementem **nilpotentnym** jeśli $\exists_{n \in \mathbb{N}} \ a^n = 0$.

Zadanie 46. *Czy w pierścieniu* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *istnieją dzielniki zera?*

Zadanie 47. *Wyznacz dzielniki zera i elementy odwracalne w pierścieniu:*

a) $\mathbb{Z}/12$
b) $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/5$
Definicja 12.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z 1. Podzbiór $J \subset A$ nazywamy **ideałem** w A(ozn. $J \trianglelefteq A$) jeśli spełnione są warunki:

(J1) $\forall_{x,y \in J} \ x - y \in J$
(J2) $\forall_{a \in A} \ \forall_{x \in J} \ ax \in J$

Zadanie 48. *Niech* A *będzie pierścieniem przemiennym i niech* $c \in A$. *Sprawdzić, że zbiór* $cA := \{ca \ : \ a \in A\}$ *jest ideałem pierścienia* A.

Zadanie 49. *Sprawdzić, czy zbiór tych funkcji* $f \in C_{(0,1)}$, *które spełniają podany warunek, jest ideałem w pierścieniu* $C_{(0,1)}$:

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
b) $f(x)$ *jest ograniczona*

Zadanie 50. *Udowodni, że każdy ideał pierścienia* $\mathbb{Z}$ *jest postaci* $n\mathbb{Z}$, *gdzie* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Definicja 13.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z 1.

★ $M \trianglelefteq A$ nazywamy **ideałem maksymalnym** jeśli

$$\forall_{J \trianglelefteq A} \; M \subsetneq J \Rightarrow J = A$$

★ $p \trianglelefteq A$ nazywamy **ideałem Pierwszym** jeśli

$$\forall_{a,b \in A} \; ab \in p \Rightarrow a \in p \text{ lub } b \in p$$

Zadanie 51. *Niech $A = Map(\mathbb{R}, [a,b])$ i niech $x_0 \in [a,b]$. Wykazać, że zbiór $I_{x_0} = \{f \in A \,:\, f(x_0) = 0\}$ jest ideałem maksymalnym pierścienia A.*

Zadanie 52. *Niech $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sprawdzić, że ideał $n\mathbb{Z}$ pierścienia $\mathbb{Z}$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą lub zerem.*

Zadanie 53. *Niech $\wp$ będzie ideałem pierwszym pierścienia przemiennego z jedynką i niech I_1, I_2 będą takimi ideałami pierścienia A, że $I_1 \cap I_2 \subset \wp$. Wykazać, że $I_1 \subset \wp$ lub $I_2 \subset \wp$.*

Zadanie 54. *Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką i niech $\varphi \,:\, A \to B$ będzie epimorfizmem pierścieni. Udowodnić, że pierścień B jest dziedziną całkowitości wtedy i tylko wtedy, gdy $ker\varphi$ jest ideałem pierwszym.*

Zadanie 55. *Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką i niech $\varphi \,:\, A \to B$ będzie epimorfizmem pierścieni. Udowodnić, że pierścień B jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy $ker\varphi$ jest ideałem maksymalnym.*

Twierdzenie 3.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z 1 a $J_1, J_2 \trianglelefteq A$ takimi, że $J_1 + J_2 = A$ wtedy

i) $J_1 J_2 = J_1 \cap J_2$
ii) *homomorfizm* $\varphi \,:\, A \to A/_{J_1} \oplus A/_{J_2}$ *indukuje izomorfizm pierścieni z 1*

$$\overline{\varphi} \,:\, A/_{J_1 J_2} \to A/_{J_1} \oplus A/_{J_2}$$

Wniosek 1.
Jeśli $J_1, J_2, \ldots, J_n \trianglelefteq A$ i $J_i + J_j = A \; \forall_{j \neq i}$ to

$$A/_{J_1 J_2 \ldots J_n} \cong A/_{J_1} \oplus A/_{J_2} \oplus \ldots \oplus A/_{J_n}$$

Definicja 14.
Niech A będzie dowolnym pierścieniem. Wielomianem o współczynnikach z pierścienia A nazywamy taki ciąg $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ elementów pierścienia A, w począwszy od pewnego miejsca wszystkie elementy są równe 0.

W zbiorze wszystkich wielomianów wprowadzamy dwa działania dodawania(po współrzędnych) i mnożenia(jak znane mnożenie "wielomianów"). Zbiór wielomianów z tymi działaniami tworzy pierścień i oznaczamy go $A[X]$.

Definicja 15.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką, $f \in A[X],\; f = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, wtedy:

♦ $deg\ f = n$, jeśli $f = (0,0,0,\ldots)$ to $deg\ f = \infty$ nazywamy **stopniem wielomianu**

Lemat 4.
Niech A będzie pierścieniem przemiennym z 1

i) $A[X]$ *jest pierścieniem przemiennym z 1*
ii) $A[X]$ *jest dziedziną całkowitości* $\Leftrightarrow$ A *jest dziedziną całkowitości*
iii) $\varphi \,:\, A \to A[X]$, $\varphi(a) = (a, 0, 0, 0, \ldots)$ *jest homomorfizmem pierścieni z 1*

Lemat 5.
Niech $f(x), g(x) \in A[X]$ *to*

i) $deg[f(x) + g(x)] \leqslant \max(deg\ f(x), deg\ g(x))$
ii) $geg[f(x)g(x)] \leqslant deg\ f(x) + deg\ g(x)$

K jest dziedziną ideałów głównych
Twierdzenie 4.
Jeśli $f(x), g(x) \in K[X]$, $g(x) \neq 0$, *to* $\exists\ q(x), r(x) \in K[X]$ *takie, że* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ *i* $r(x) = 0$ *lub* $deg\ r(x) < deg\ g(x)$

Zadanie 56. *Wykonać następujące dzielenia z resztą :*

i) $X^4 - 9X^3 + 23X^2 - 16X + 13$ *przez* $X - 5$ *w* $\mathbb{Z}[X]$
ii) $2X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ *przez* $3X^2 + X + 4$ *w* $\mathbb{Z}/5[X]$
iii) $X^5 + 4X^4 + 3X^2 + 2$ *przez* $2X^3 + X + 4$ *w* $\mathbb{Z}/5[X]$
iv) $2X^5 + 8X^4 + 7X^3 + 3X + 5$ *przez* $3X^3 + 7X^2 + 5X + 1$ *w* $\mathbb{Z}/10[X]$

Zadanie 57. *Dany niech będzie wielomian* $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in A[X]$ *oraz* $g = X - c \in A[X]$. *Znaleźć wzory rekurencyjne na współczynniki ilorazu* $q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \cdots + b_1X + b_0$ *oraz resztę* $r \in A$ *z dzielenia z resztą wielomianów* f *przez* g.

Zadanie 58. *Stosując metodę Hornera wykonać następujące dzielenia z resztą :*

i) $X^5 + 2X^4 + 5X^3 + 13$ *przez* $X + 1$ *w* $\mathbb{Z}[X]$
ii) $3X^5 + 7X^4 - 5X^3 - 14X^2 - 12X - 4$ *przez* $X + 2$ *w* $\mathbb{Z}[X]$
iii) $X^4 + 5X^3 + 2X^2 + 4X + 3$ *przez* $X + 2$ *w* $\mathbb{Z}/6[X]$
iv) $X^4 + 3X + 2$ *przez* $X + 4$ *w* $\mathbb{Z}/6[X]$

Zadanie 59. *W pierścieniu ilorazowym* $\mathbb{Z}[X]/I$, *gdzie* $I = X^2\mathbb{Z}[X]$, *rozwiązać równanie* $((1 + 2X) + I)t = (5 + 9X) + I$ *o niewiadomej* t.

Zadanie 60. *W pierścieniu ilorazowym* $\mathbb{Z}[X]/I$, *gdzie* $I = X^3\mathbb{Z}[X]$, *rozwiązać dane równanie z niewiadomą* t*:*

i) $((1 + 2X - 4X^2) + I)t = (2 + 5X - X^2) + I$
ii) $(X + I)t = I$

Zadanie 61. *Zbadać, czy pierścień ilorazowy* $\mathbb{Z}/5[X]/f(X)\mathbb{Z}/5$ *jest dziedziną całkowitości, jeśli* $f(X)$ *jest następującej postaci:*

i) $X^2 + 1$
ii) $X^2 + 4X + 1$

Twierdzenie 5.
$K[X]$ *jest dziedziną ideałów głównych.*
Definicja 16.
Niech $f(x) \in K[X]$. Mówimy, że wielomian $f(x)$ jest nierozkładalny jeśli $deg\ f(x) > 0$ i $f(x) = g(x)h(x)$ to $deg\ g(x) = 0$ lub $deg\ h(x) = 0$.
Lemat 6.
Niech $p(x) \in K[X]$ *będzie wielomianem nierozkładalnym i* $f(x), g(x) \in K[X]$. *Jeśli* $p(x)|f(x)g(x)$ *to* $p(x)|f(x)$ *lub* $p(x)|g(x)$.

Twierdzenie 6.
Dla każdego $f(x) \in K[X]$, *deg* $f(x) > 0$ *mamy*

$$f(x) = p_1^{e_1}(x)p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

gdzie $e_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p_i \in K[X]$ *wielomiany nierozkładalne. Rozkład* $f(x)$ *na iloczyn potęg wielomianów nierozkładalnych jest określony z dokładnością do kolejności składników.*

Definicja 17. Niech $a \in A$. Mówimy, że a jest **pierwiastkiem** wielomianu $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[X]$ jeżeli $f(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = 0$

Twierdzenie 7.
Niech $f(x) \in A[X]$ *wtedy*

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \text{ dzieli } f(x) \text{ w } A[X]$$

Twierdzenie 8.
Jeżeli A *jest dziedziną całkowitości,* $f(x) \in A[X]$ *i deg* $f(x) = n$, *to* f *ma co najwyżej* n *pierwiastków w* A.

Twierdzenie 9.
Jeśli $f(x) \in \mathbb{C}[X]$ *i deg* $f(x) = n$ *to* f *ma dokładnie* n *pierwiastków w* $\mathbb{C}$ *przy uwzględnieniu pierwiastków wielokrotnych*

Definicja 18. Wielomian $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_1X + a_0 \in A[X]$ nazywamy wielomianem pierwotnym, jeśli $1 = NWD(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Lemat 7 (Kryterium Eisensteina)**.** *Niech* $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}$. *Jeśli istnieje taka liczba pierwsza* p, *że* $p|a_i$, $i = 1, 2, \dots n-1$ *oraz* $p \nmid a_n$, *i* $p^2 \nmid a_0$, *to wielomian* f *jest nierozkładalny w pierścieniu* $\mathbb{Q}[X]$. *Jeśli ponadto* f *jest wielomianem pierwotnym, to* f *jest nierozkładalny w* $\mathbb{Z}[X]$.

Zadanie 62. *W podanych pierścieniach rozłożyć na czynniki nierozkładalne wielomian* $X^6 - 1$

i) $\mathbb{R}[X]$
ii) $\mathbb{C}[X]$
iii) $\mathbb{Z}/2[X]$
iv) $\mathbb{Z}/3[X]$
v) $\mathbb{Z}/7[X]$

Zadanie 63. *W podanych pierścieniach rozłożyć na czynniki nierozkładalne wielomian* $X^3 + 3X + 1$

i) $\mathbb{Z}/5[X]$
ii) $\mathbb{Z}/7[X]$
iii) $\mathbb{Z}/11[X]$

Zadanie 64. *Stosując kryterium Eisensteina, wykazać, że poniższe wielomiany są nierozkładalne w pierścieniu* $\mathbb{Q}[X]$

i) $X^3 - 3X^2 - 6X + 3$
ii) $X^4 - 6X^3 + 18X^2 + 12X - 10$
iii) $X^5 - 5$
iv) $2X^4 - 51X^2 + 57X - 66$
v) $X^5 - 18X^2 + 30$